

Analyse I : résumé du cours

- On a étudié les sujets suivants:
- nombres réels (inf-sup), nombres complexes
 - suites numériques (a_n)
 - séries numériques $\sum a_n$
 - fonctions réelles
 - limites des fonctions
 - dérivées des fonctions
 - développements limités
 - séries entières, séries de Taylor $\sum a_n (x-x_0)^n$ ^{entière}
 - intégrales des fonctions continues sur $[a, b]$
 - intégrales généralisées

Les sujets sont liés.

① Limites des suites $\Leftrightarrow$ Limites des fonctions

(1) Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = l$ (Par contre $\exists$ des fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = l$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ n'existe pas)

(2) Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ (Par contre $\exists$ des fonctions telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$, mais $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ n'existe pas)

Ex $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log((1+\frac{1}{h^2})^{2h})}{\sinh \frac{1}{h}}$ Passage $\frac{1}{h} \rightarrow x$ $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log((1+x^2)^{\frac{2}{x}})}{\sinh x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \log(1+x^2)}{x \sinh x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x^2 - \frac{x^4}{2} + \dots + x^4 \varepsilon(x))}{x(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cancel{x^2} (1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x))}{\cancel{x^2} (1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x))} = 2 \Rightarrow \text{Par la propriété} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log((1+\frac{1}{h^2})^{2h})}{\sinh \frac{1}{h}} = 2 \end{aligned}$$

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n}))$ converge? Idée: comparer avec $\sum \frac{1}{n^2}$

On considère $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} \stackrel{DL}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \varepsilon(x)x^4)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \varepsilon(x)x^4}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\alpha=2$

propriété $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ par la déf de la limite, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{matrix}$

$$\frac{1}{4} \leq \left| \frac{1 - \cos(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \right| \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{n^2} \leq (1 - \cos \frac{1}{n}) \leq \frac{3}{4} \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ les séries $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n}))$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ont la même nature (par comparaison)

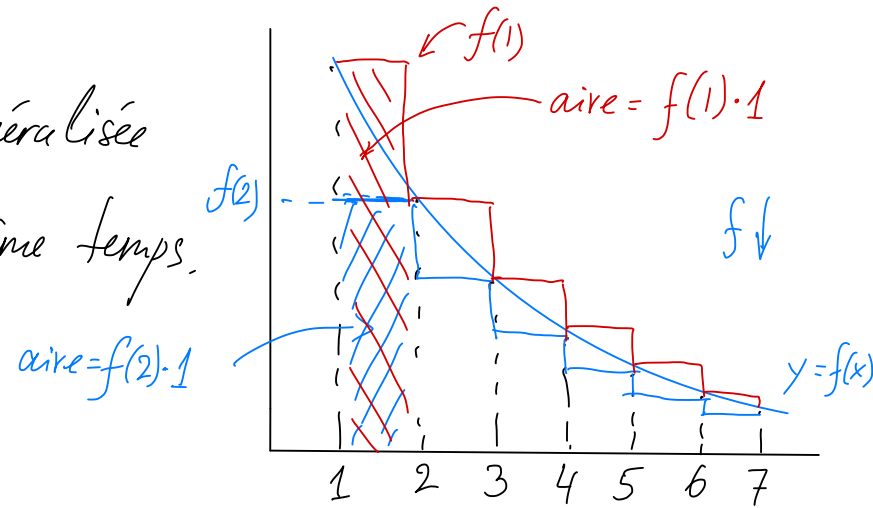
On sait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(\frac{1}{n}))$ converge

② Séries numériques $\longleftrightarrow$ Intégrales généralisées

Proposition. Soit $f \geq 0$ une fonction continue et strictement décroissante.
pour tout $x \geq a$ pour un certain $a \geq 1$.

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x) dx$ convergent ou divergent en même temps.

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$



Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$ $\xrightarrow{\text{difficile}}$ Proposition $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$ $\xleftarrow{\text{facile}}$

Ex. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^c}$ pour quelles valeurs de c la série converge-t-elle? $\Leftrightarrow$ Proposition

$\Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^c} \stackrel{\log x = u}{=} \int_2^{\infty} \frac{d(\log x)}{(\log x)^c} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u^c} \Rightarrow \text{converge} \Leftrightarrow c > 1$

Alors par la proposition, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^c}$ converge $\Leftrightarrow c > 1$.

③ Fonctions dérivables $\leftrightarrow$ Séries entières.

Rappel: Les séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$

ont le même rayon de convergence r . Si $r > 0$, soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$.

Alors $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ et $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $F(x_0) = 0$

sur $]x_0-r, x_0+r[$.

Ex. Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ sur $\mathbb{R}$. Trouver $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$

$\Rightarrow \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow f(x) = \sinh x - x$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} (\sinh x - x) dx = -\cosh x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi/2} = -(-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =$
 $= 1 - \frac{\pi^2}{8} < 0.$

On peut vérifier directement: $\int \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} dx = \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+2)!} = F(x)$

le même résultat 😊

Alors $\int_0^{\pi/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+2)!} \Big|_0^{\pi/2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{(2k)!} \Big|_0^{\pi/2} = -\cosh x + 1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} = -(-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =$
 $= 1 - \frac{\pi^2}{8}$

constante,
s'élimine dans les limites

On voit que la 1ère méthode est plus efficace.

(4)

Exercice.

$$f(x) = \begin{cases} x \log x, & x > 0 \\ \sin x \cdot e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $x=0$?
 dérivable en $x=0$?
 (à gauche et à droite?)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log y}{y} \stackrel{BH}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{y}}{1} = 0.$$

$y = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

f est continue en $x=0$.

dérivées à droite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x \rightarrow -\infty$

f n'est pas dérivable à droite

à gauche: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0 \Rightarrow f_g'(0) = 0$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en $x=0$; $f_g'(0) = 0$.

f n'est pas dérivable en $x=0$, mais elle est continue en $x=0$.

⑤ Croissance relative des fonctions

Q: Parmi les limites suivantes, lesquelles sont égales à zéro?

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \quad \begin{matrix} \text{BH} \\ a > 1, \alpha > 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x (\log a)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1) x^{\alpha-k}}{\underbrace{a^x (\log a)^k}_{\rightarrow \infty}} \xrightarrow{\alpha-k \rightarrow 0 \text{ ou const}} 0 = 0.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \quad \begin{matrix} \text{BH} \\ \alpha > 0 \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x \quad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{matrix} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^\alpha} \log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\log y}{y^\alpha} \stackrel{(2)}{=} 0.$$

L'hierarchie de croissance des fonctions.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

$a > 1, \alpha > 0$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$$

$\alpha > 0$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$$

$\alpha > 0$

Notation: $\succ$ = croît plus vite

Remarque. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow x^{\frac{\alpha}{k}} \succ \log x \Rightarrow x^\alpha \succ (\log x)^k$

$\alpha > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{k} > 0$

$$a^x \succ x^\alpha$$

$\alpha > 0$

$$x^\alpha \succ (\log x)^k$$

$\alpha > 0, k > 0$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a > 1$$

Dém: D'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 \quad \forall a$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$\boxed{n! > a^n \quad a > 1}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Dém: D'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n+1} n^n}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e}} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\boxed{n^n > n!}$$

Alors on a l'hierarchie des croissances :

$$n^n > n! > a^n > n^p > (\log n)^q$$

$$a > 1$$

$$p > 0$$

$$q > 0$$

$$a^x > x^p > (\log x)^q$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow +\infty$

Classes de régularité des fonctions.

Analytique $\Leftrightarrow f(x) =$ sa série de Taylor sur $\overline{I}$ ouvert

↓
Infiniment dérivable $\Leftrightarrow f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ (lisse)

↓
 n fois continûment dérivable $\Leftrightarrow f \in C^n(I, \mathbb{R})$
 $n \geq 2$

↓
 $n \geq 2$ n fois dérivable $\Leftrightarrow f^{(n)}(x)$ existe sur I

↓
Dérivable $\Leftrightarrow f'(x)$ existe sur $\overline{I}$ ← TAF: $\exists t \in]x, y[\subset I: \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(t)$

↓
Continue $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \forall a \in I$ ← TVI:

↓
Intégrable sur $[a, b] \subset I \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx$ existe ← $f([a, b] \cap \overline{I}) = [\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f]$
(y compris les intégrales généralisées)

Théorème de la moyenne
 $\exists c \in [a, b] \cap \overline{I} \text{ t.q. } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

* * * La fin

* * *

Examen final:

Le 17 janvier 10¹⁵ - 13¹⁵ STCC (Garden)

Notation: $\text{Sup} = \sup$, $\text{Inf} = \inf$, $\text{Log} = \log$
différentiable = dérivable.

Sujets.

- (1) Nombres réels, inf-sup.
- (2) Nombres complexes
- (3) Méthode de récurrence
- (4) Limites des suites (y compris les suites définies par récurrence; ainsi que $\liminf$, $\limsup$)
- (5) Séries numériques: critères de convergence
- (6) Limites des fonctions (par déf., à partir des suites, avec BH, DL)
- (7) Continuité, prolongement par continuité, limites à gauche et à droite
- (8) TVI
- (9) Dérivée d'une fonction, fonction différentiable à gauche et à droite
- (10) TAF, propriétés des fonctions différentiables sur un intervalle
- (11) DL
- (12) Formule de Taylor et série de Taylor.
- (13) Séries entières, rayon et domaine de convergence

- (14) Intégrale et primitive, Théorème de la moyenne
- (15) Changement de variable, intégration par parties; décomposition en simples fractions
- (16) Intégrales généralisées, critères de convergence.

Comment réussir son examen.

(1) Lire et mémoriser les résumés



(2-3) Relire les notes du cours

Faire les tests blanc + série questions ouvertes

(4) Relire les séries d'exercices.

(5) Faire examens 2017, 2018, 2020

(6) Relire les résumés !!

(7) Faire examen - 2019.

Bon courage !!
et Joyeuses fêtes !!!

